境界多項式について (数式処理研究の新たな発展)

北本, 卓也

数理解析研究所講究録
第1759巻 2011年 124-127

境界多項式について
On the boundary polynomial

北本卓也
TAKUYA KITAMOTO
山口大・教育学部
YAMAGUCHI UNIVERSITY, FACULTY OF EDUCATION *

Abstract

Recently, Computer algebra system (CAS) such as Maple, Mathematica is gaining its popularity in various fields of science, education and engineering. Symbolic computation, one of their features, provides us new applications of computer systems that conventional numerical packages can not. Control engineering, where unknown parameters play important roles as design parameters and uncertain indeterminates, has a lot of such applications.

In this paper, we define 'boundary polynomial' and show its applications to the stability analysis of a control system. Given a system with a parameter k, roughly speaking, boundary polynomial is a polynomial of k that vanishes when the system is on the verge of instability. The boundary polynomial has a close relationship with well-known 'Hurwitz criterion' for the stability analysis, and can be used to compute the range of parameter k where the system is stable.

1 序論

近年、制御系設計へ数式処理を応用する研究が盛んに行われている。特に、QE (Quantifier Elimination) が注目されており、様々な研究成果が発表されてきている。これらの QE を中心とした数式処理の手法は、非常に柔軟で応用範囲の広いものであるが、その一方で計算が重い事が知られている。これは制御系設計への応用についても同様であり、計算過程や計算結果があまりに複雑なため、実際の問題への適用が困難な場合もしばしばある。

そこで、これらの算法を効率化するために本稿では「境界多項式」を定義し、その制御系設計への応用を提案する。

2 連続的なシステムの安定性に関する境界多項式

制御系設計において、システムの安全性は最も重要な要求事項である。次の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (\text{ただし、}A\text{ は }n \times n\text{ の正方行列、}x\text{ はシステム状態を表す }n\text{ 次元ベクトル}) \tag{1}$$

で表される連続的なシステムが与えられたとき、そのシステムが安定であるための必要十分条件は A の全ての固有値の実部が負であることである。ここでは、行列 A がパラメータ k を含む場合にシステムが安定であるための k の範囲（これを以後、安定領域と呼ぶ）を求める算法を考える。このために境界多項式を次のように定義する。

*kitamoto@yamaguchi-u.ac.jp

定義 1 要素が k の多項式である行列 A が与えられたとき、次の性質を持たす多項式 $g(k)$ を連続的なシステムの安定性のための境界多項式と呼ぶ。

$$\text{行列 } A \text{ が虚軸上に固有値を持つ} \Rightarrow g(k) = 0 \tag{2}$$

この境界多項式が計算できれば、A の安定領域を次のようにして計算することができる。

今、$g(k)$ の実根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ $(\alpha_1 < \cdots < \alpha_m)$ とすると、$g(k)$ の定義により、$\alpha_j < k < \alpha_{j+1}$ を満たす範囲で k の値が変動しても、A の安定性は変わらないことがわかる。つまり、

$$k = \alpha_1 - 1, \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \cdots, \frac{\alpha_{m-1} + \alpha_m}{2}, \alpha_m + 1$$

での A の安定性さえわかれば、A の安定領域を計算できる。例えば、仮に

$$k = \frac{\alpha_{r_1} + \alpha_{r_1+1}}{2}, \cdots, \frac{\alpha_{r_p} + \alpha_{r_p+1}}{2}, \alpha_m + 1$$

で A が安定であれば、安定領域は $\langle \alpha_{r_1}, \alpha_{r_1+1} \rangle \cup \cdots \langle \alpha_{r_p}, \alpha_{r_p+1} \rangle \cup \langle \alpha_m, \infty \rangle$ となる。

次に境界多項式の計算法を考える。行列 A の特性多項式を

$$f(s) = \mathrm{Det}(sI - A) = s^n + f_{n-1}s^{n-1} + \cdots + f_1 s + f_0 \quad (\text{ただし、} f_j \text{ は } k \text{ の多項式}) \tag{3}$$

とするとき、A が虚軸上に根を持つにはある実数 α に対して $f(\alpha i) = 0$ が成り立つ必要があるので、$f(\alpha i)$ の実部と虚部に分け、$\mathrm{Re}\,(f(\alpha i)) = 0, \mathrm{Im}\,(f(\alpha i)) = 0$ から終結式を用いて α を消去すれば、パラメータ k の多項式を得る。その無平方部分を取り出したものは、計算方法から (7) を満たす境界多項式 $g(k)$ である。

制御工学では、システムが安定であるための必要十分条件として次の「Hurwitz の安定性条件」が古くから知られている。

定理 1 微分方程式 (1) を満たすシステムが与えられているとし、A の特性多項式が (3) で表されているとする。ここで、行列 $n \times n$ の正方行列 H を

$$H = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{n-3} & f_{n-5} & \cdots & f_{-n+3} \\ 1 & f_{n-2} & f_{n-4} & \cdots & f_{-n+4} \\ 0 & f_{n-1} & f_{n-3} & \cdots & f_{-n+5} \\ 0 & 1 & f_{n-2} & \cdots & f_{-n+6} \\ 0 & 0 & f_{n-1} & \cdots & f_{-n+7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_0 \end{bmatrix} \quad (\text{ただし、} j < 0 \text{ に対しては } f_j = 0) \tag{4}$$

と定義し、Δ_j $(j = 1, \cdots, n)$ を H の $j \times j$ の主小行列式、すなわち

$$\Delta_1 = f_{n-1},\ \Delta_2 = \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} f_{n-1} & f_{n-3} \\ f_n & f_{n-2} \end{bmatrix}\right), \cdots, \Delta_n = \mathrm{Det}(H) \tag{5}$$

と定義すると、(1) のシステムが安定であるための必要十分条件は $\Delta_j > 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ である。

上の「Hurwitz の安定性条件」より、$h(k) = \mathrm{Sqf}\left(\prod_{j=1}^{n} (\Delta_j)\right)$ (ただし、$\mathrm{Sqf}(h(k))$ は $h(k)$ の無平方部分) と置くと、$h(k)$ は連続的なシステムの安定性のための境界多項式である。

先程、上で示した $\mathrm{Re}\,(f(\alpha i)) = 0, \mathrm{Im}\,(f(\alpha i)) = 0$ から終結式を用いて境界多項式を計算する方法を示したが、この方法で計算した境界多項式 $g(k)$ は、実は $g(k) = \mathrm{Sqf}(\Delta_n)$ を満たすことが示せる。

上で2種類の境界多項式 $g(k), h(k)$ を求めたが、明らかに $g(k)$ は $h(k)$ より簡単な（もしくは同じ）多項式となっている。

実際、A が

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -k-2 & -3k-4 \end{bmatrix} \tag{6}$$

で与えられたとすると、Δ_j は

$$\Delta_1 = 3k+4,\ \ \Delta_2 = \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 3k+4 & 1 \\ 1 & k+2 \end{bmatrix}\right) = (3k+7)(k+1),\ \ \Delta_3 = \mathrm{Det}(H) = (3k+7)(k+1)$$

となるので、$h(k) = (3k+7)(3k+4)(k+1), g(k) = (3k+7)(k+1)$ を得る。

ここで、$g(k)$ を用いて安定領域を計算すると次のようになる。$g(k) = 0$ の実根は $-\frac{7}{3}, -1$ となり、$k = -\frac{10}{7}, -\frac{5}{3}, 0$ の3点における安定性を調べると、$k = 0$ を除いて不安定であるので、安定領域は $\langle -1, \infty \rangle$ である。

Hurwitz の安定性条件はシステムが安定となるための必要十分条件である。しかしながら、上の $g(k)$ と $h(k)$ を比較すると、Hurwitz の安定性条件から導き出された境界多項式 $h(k)$ は、境界多項式として余分な因子 $(3k+4)$ を含んでいる。なぜ、システムの安定性判別と一見関係のない、このような因子を Hurwitz の安定性条件は持っているのだろうか？

結論から言うと、これは「Hurwitz の安定性条件が、安定領域を指定するために多項式の符号のみを使用しているため」である。例えば、先程の境界多項式 $g(k) = (3k+7)(k+1)$ の符号のみを用いたのでは安定領域 $\langle -1, \infty \rangle$ を指定することは不可能である。なぜならば、$g(k) < 0$ とすると $g(k) < 0 \Leftrightarrow k \in \langle -\frac{7}{3}, -1 \rangle$ であるし、$g(k) > 0$ とすると $g(k) > 0 \Leftrightarrow k \in \langle -\infty, -\frac{7}{3} \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$ である。

3 離散的なシステムの安定性に関する境界多項式

離散的なシステム $x(k+1) = Ax(k)$ に対しては、そのシステムが安定であるための必要十分条件は「行列 A の固有値の絶対値が全て1以下（つまり、複素平面上の原点を中心とする単位円に含まれる）」で与えられる。

これに対しても、前節と同様に安定性のための境界多項式を考える。具体的には、離散的なシステムに対する境界多項式を以下のように定義する。

定義 2 要素が k の多項式である行列 A が与えられたとき、次の性質を満たす多項式 $g(k)$ を離散的なシステムの安定性のための境界多項式と呼ぶ。

$$\text{行列 } A \text{ が原点を中心とする単位円上に固有値を持つ} \Rightarrow g(k) = 0 \tag{7}$$

$f(s)$ を A の特性多項式とするとき、上の条件は $f(x+iy) = 0,\ x^2+y^2 = 1$ となるので

$$\mathrm{Re}(f(x+iy)) = 0,\ \mathrm{Im}(f(x+iy)) = 0,\ x^2+y^2 = 1 \tag{8}$$

より、グレブナー基底を用いて x, y を消去した多項式の無平方部分を取ったものが求める境界多項式である。

例として、A を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -k-2 & -3k-4 \end{bmatrix} \tag{9}$$

のようにとり、上の離散的なシステムの安定性のための境界多項式を計算する。特性多項式は $f(s) = s^3 + (3k+4)s^2 + (k+2)s + 2$ となるので (8) は

$$2+2x+kx+4x^2+3kx^2+x^3-4y^2-3ky^2-3xy^2, 2y+ky+8xy+6kxy+3x^2y-y^3, x^2+y^2-1 \quad (10)$$

となる。これからグレブナー基底を用いて x, y を消去すると $(2k+3)(4k+9)(5k+3)$ を得る。

離散系システムの「Hurwitz の安定性条件」に対応するものとして、「ジェリーの判別法」というものがある。詳細は省略するが、この判別法を用いて (9) のシステムの安定性条件を導きだすと

$$b_0 > 0, \ c_0 < 0, \ d_0 < 0 \quad (11)$$

ただし、$b_0 = -5k-6, \ c_0 = -(5k+3)(5k+9), \ d_0 = -3(2k+3)(4k+9)(5k+3)^2$

を得る。この条件式からも境界多項式が

$$\mathrm{Sqf}(b_0c_0d_0) = (2k+3)(4k+9)(5k+3)(5k+6)(5k+9) \quad (12)$$

と取れることがわかるが、先程の境界多項式と比べると余分な因子 $(5k+6)(5k+9)$ を含んでいる。これは先程の連続的なシステムの場合と同様に、ジェリーの判別法が多項式の符号のみで安定領域を指定するために必要とされるものである。

4 結論

パラメータを含む連続的、または離散的なシステムが与えられたとき、その安定性を判別するために「境界多項式」というものを定義し、終結式やグレブナー基底を用いた計算法を示した。また、その「境界多項式」を用いてシステムが安定とするパラメータの領域（安定領域）を計算する方法を提案した。

制御系設計において、古くから知られている「Hurwtiz の安定性条件」、「ジェリーの判別法」という方法からも境界多項式を求めることができるが、その場合は余分な因子を含んでしまうことになる。これは「Hurwtiz の安定性条件」、「ジェリーの判別法」が、安定領域を指定するために多項式の符号のみを使用していることに起因する。余分な因子を含んでいても安定領域の計算は可能であるが、境界多項式の次数が低い方がより効率的に計算できるため、終結式やグレブナー基底を用いて「境界多項式」を計算した方が有利である。

参 考 文 献

[1] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover, "Robust and Optimal Control," Prentill-hall. Inc, New Jersey, 1996.

[2] Hurwitz の安定判別法: http://ysserve.int-univ.com/Lecture/ControlMecha1/node24.html

[3] J. V. Z. Gathen and J. Gerhand, "Modern Computer Algebra," Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, "Ideals, Varieties, and Algorithms," Springer-Verlag, New York, 1991.